NUMERICKÉ DERIVACE

– Využíváme pro aproximaci derivace dané funkce f především v případech, kdy

- derivovaná funkce je zadaná pouze tabulkou,
- výpočet přesné hodnoty derivace je příliš pracný.

– Derivovanou funkci nahradíme Newtonovým interpolačním polynomem.
– Přesnou hodnotu derivace odhadneme pomocí derivace interpolačního polynomu.

– Hodnotu derivace počítáme v uzlech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s krokem $h > 0$, tzn.

$$x_{i+1} = x_i + h$$

- **Dopředná diference** (pro krajní bod):
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **Zpětná diference** (pro krajní bod):
$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

- **Centrální diference** (pro vnitřní body):
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- **Druhá centrální diference** (pro vnitřní body):
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Příklad: Je dána funkce $f(x) = 2x + \mathrm{e}^{2x}$. Odhadněte hodnotu její první a druhé derivace v daných uzlech.

i	1	2	3
x_i	$-0,5$	0	$0,5$
y_i	$-0,63212$	1	$3,71828$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} =$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} =$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} =$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} =$$

Přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech:
$f'_*(x) = 2 + 2\mathrm{e}^{2x} = 2(1 + \mathrm{e}^{2x})$
$f''_*(x) = 4\mathrm{e}^{2x}$
$f'_*(x_1) = 2,73576$
$f'_*(x_2) = 4$
$f'_*(x_3) = 7,43656$
$f''_*(x_2) = 4$

Odhad chyby aproximace:
$|f'(x_1) - f'_*(x_1)| = |3,26424 - 2,73576| = 0,52848$
$|f'(x_2) - f'_*(x_2)| = |4,3504 - 4| = 0,3504$
$|f'(x_3) - f'_*(x_3)| = |5,43656 - 7,43656| = 2$
$|f''(x_2) - f''_*(x_2)| = |4,34464 - 4| = 0,34464$

Příklad: Funkce $f(x)$ je dána tabulkou. Odhadněte hodnotu její první a druhé derivace v daných uzlech.

i	1	2	3	4
x_i	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1
y_i	$0,06$	$1,72$	$3,65$	$7,24$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} =$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} =$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_4) - f(x_2)}{2h} =$$

$$f'(x_4) = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{h} =$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} =$$

$$f''(x_3) = \frac{f(x_4) - 2f(x_3) + f(x_2)}{h^2} =$$